مستوى الدراسي:الأولى علوم تجريبية	درس	الثانوية التأهيلية: وادي الذهب
عدد الساعات : 10	النهايات	الأستاذ : رشيد بلمو

I. نهاية لا منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

نشاط 1: تكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=x^2$ املأ الجدول التالي :

x	10000	100	10	1	0	-1	-10	-1000	-10000
$f(x)$									

نلاحظ أنه عندما تكبر x فان $f(x)$ تكبر أيضا نكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

نلاحظ أنه عندما تصغر x فان $f(x)$ تكبر نكتب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ملخص: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a;+\infty[$ حيث $a\in\mathbb{R}$.

إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ " أو " $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$ "

يمكن التعبير بجمل مشابهة على النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

نهايات اعتيادية:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ إذا كان n زوجي • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ إذا كان n فردي

أمثلة

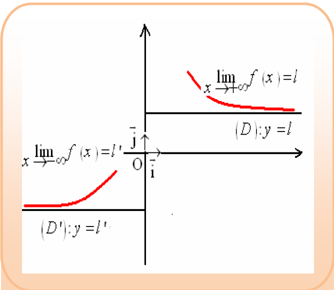
$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

II. نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

نشاط 2: تكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ املأ الجدول التالي :

x	10000	100	10	1	0	-1	-10	-1000	-10000
$f(x)$									



نلاحظ أنه عندما تكبر x فان $f(x)$ تقترب من الصفر و نكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^+$

نلاحظ أنه عندما تصغر x فان $f(x)$ تقترب من الصفر نكتب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^-$

ملخص: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a;+\infty[$ حيث $a\in\mathbb{R}$ و ليكن l عددا حقيقيا

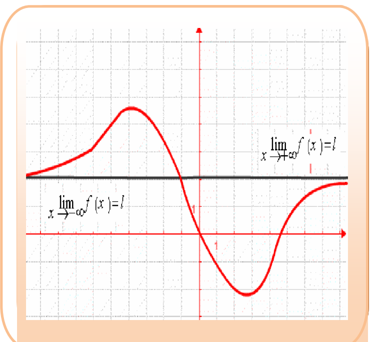
إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ " أو " $\lim\limits_{+\infty} f=l$ "

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]-\infty;b]$ حيث $b\in\mathbb{R}$ و ليكن l' عددا حقيقيا

إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l' عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l'$ " أو " $\lim\limits_{-\infty} f=l'$ "

نهايات اعتيادية:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0^+$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}=0^-$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n}=0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n}=0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$



خاصية : لتكن f دالة عددية و l عددا حقيقيا

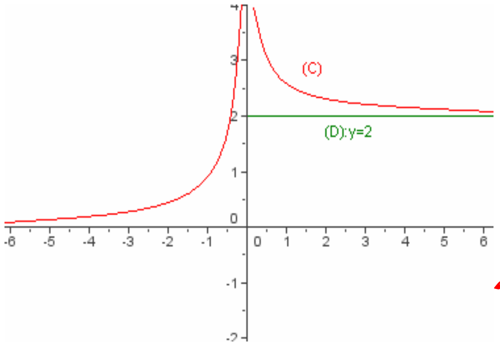
إذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فان هذه النهاية وحيدة.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ يكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-l)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ يكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-l)=0$

تمرين تطبيقي 1 :

1 / بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-2x^3+x}{x^3}\right)=-2$

**تمرين تطبيقي 2 : قراءة نهايات مبيانيا



لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$

من خلال الشكل

حدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

III. النهاية المنتهية و اللانهائية لدالة في نقطة

1. نهاية منتهية لدالة في نقطة

لتكن f دالة عددية و l و a عددين حقيقيين بحيث f معرفة على مجال على الشكل $]a-\alpha;a+\alpha[$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$

أو على مجموعة على الشكل $]a-\alpha;a+\alpha[-\{a\}$

إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ " أو " $\lim\limits_{a} f=l$ "

2. خاصية

لتكن f دالة عددية و l و a عددين حقيقيين

إذا كانت f تقبل نهاية l في a فان هذه النهاية وحيدة.

نهايات اعتيادية:

- $\lim\limits_{x\to0} x=0$ ● $\lim\limits_{x\to0} x^2=0$ ● $\lim\limits_{x\to0} x^3=0$ ● $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \lim\limits_{x\to0} x^n=0$

3. نهاية لا منتهية لدالة في نقطة

لتكن f دالة عددية و $a\in\mathbb{R}$. إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ " أو " $\lim\limits_{a} f=+\infty$ "

IV. النهاية على اليمين والنهاية على اليسار لدالة في نقطة

لتكن f دالة عددية و l و a عددين حقيقيين

- إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ " أو " $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l$ "
- إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ (على التوالي إلى $-\infty$) عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ " أو " $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty$ " (على التوالي $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$)

نعرف بنفس الطريقة النهاية على اليسار في نقطة

نهايات اعتيادية:

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ ● $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$ ● $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$ ● $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\sqrt{x}=0$ ● $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$
- إذا كان n زوجي غير منعدم , فان $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x<0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$ ● إذا كان n فردي غير منعدم , فان $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x<0}}\frac{1}{x^n}=-\infty$

أمثلة

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x^4}=+\infty$

مبرهنة: لتكن f دالة عددية و l و a عددين حقيقيين $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ يكافئ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l$

تمرين تطبيقي 3 :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} & ;\ \text{Si } x\geq0\\ f(x)=x^3 & ;\ \text{Si } x<0\end{cases}$$

احسب $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

تمرين تطبيقي 4 :

1/ بين أن $\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$ و أن $\lim\limits_{x\to1}(-x-1)=-2$.

2 / استنتج النهايات التالية : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x>1}}\frac{x^2-1}{|x-1|}$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x<1}}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

V. العمليات على النهايات

في كل ما يلي a عدد حقيقي أو يساوي $+\infty$ أو $-\infty$ و l و l' عددان حقيقيان , وهذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

1. النهاية و الجمع:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

2. النهاية و الضرب:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$	0	
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	$l.l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد		

3. النهاية و المقلوب:

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\frac{1}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

4. النهاية و الخارج:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$ أو $l\prec 0$	$+\infty$ أو $l\succ 0$	$+\infty$ أو $l\succ 0$	$-\infty$ أو $l\prec 0$	$-\infty$	0	$-\infty$ $+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	∞	$l\succ 0$	$l\succ 0$	$l\prec 0$	0^+	0^+	0^-	0^-	$l\prec 0$	0	$-\infty$ $+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد	

**** تمرين تطبيقي 5 :**

احسب النهايات التالية :

$$(1 \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \qquad (2 \quad \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{1}{-x+3} \qquad (3 \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{3x-4}{x-1}$$

**** تمرين تطبيقي 6 :**

احسب مايلي : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x}}$

5. نهاية الدالة الحدودية ، نهاية الدالة الجذرية

خاصية : لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين

$$\lim_{x\to a}P(x)=P(a) \qquad \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)} \quad \text{في حالة} \quad Q(a)\neq 0$$

إذا كانت ax^n و bx^m هما على التوالي حديتي $P(x)$ و $Q(x)$ الأكبر درجة فان

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}ax^n \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

$$\text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n}{bx^m} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{bx^m}$$

**نهاية دالة حدودية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

**نهاية دالة جذرية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

**** تمرين تطبيقي 7 :**

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-3x^2+5x+1\right)\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\left(-3x^7-3x+10\right)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(3x^5+\sqrt{5}x+1\right)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{3}x^6+\frac{5}{7}x+1\right)\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^3+5x^2-4x+5}{x^2+x-1}\right)\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7x^3+5x^2-5}{-2x^2+x-1}\right)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^5+5x^4+x}{8x^5+x^3-1}\right)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+5}{7x^3-1}\right)\ ;$$

6. نهاية الدوال اللاجذرية

خاصية: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على الشكل $[a;+\infty[$ بحيث $\forall x \in [a;+\infty[\; f(x) \geq 0$
نهاية دالة جذرية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

- إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ و $l \geq 0$ فان $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$
- إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $l \geq 0$ فان $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

ملاحظة : هذه خاصية تبقى صالحة إذا كان تؤول x إلى $-\infty$ أو إلى a أو إلى a على اليمين أو إلى اليسار

**** تمرين تطبيقي 8 :**

لنحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{3x^2 + x + 1} \; ; \lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}} \; ; \lim_{x \to -1^-} \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}} \; ; \lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x - 1}{x^2 - 1}} \; ; \lim_{x \to 2} \sqrt{3x^2 + x + 1} \; ; \lim_{x \to +\infty} \sqrt{7x^4 - 2x + 3}$$

7. نهاية الدوال المثلثية

خاصيات:

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}^*$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}^*$
- $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$ و $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a \quad \forall a \in \mathbb{R} / k \in \mathbb{Z}$ و $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

**** تمرين تطبيقي 9 :**

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin\,2x}{3x}$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{6} \\ x > \frac{\pi}{6}}} \frac{Sinx}{x + \frac{\pi}{6}}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - Cos\,2x}{x^2} \; ; \; \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{Sinx} \; ; \; \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - Sinx}{x^3}$

8. النهايات والترتيب

f و g و h دوال عددية و $I =]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[- \{x_0\}$ ضمن حيز تعريف هذه الدوال

* إذا كان لكل x من I ، $|f(x) - l| \leq u(x)$ و كان $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$ فان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
* إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ وكان $f \geq h \geq g$ على I فان $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$
* إذا كان لكل x من I ، $f(x) \geq u(x)$ و كان $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty$ فان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
* إذا كان لكل x من I ، $f(x) \leq u(x)$ و كان $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty$ فان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

ملاحظة

الخاصيات السابقة تبقى صالحة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار
مع تعويض I بالمجموعة المناسبة

**** تمرين تطبيقي 10 :**

1) بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}); \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - Cosx} \leq 1$

2) احسب النهايات التالية :

أ / $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2 - Cosx}$; ب / $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{2 - Cosx}$; ج / $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + Cosx}{2 - Cosx}$

3) احسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3 + Cos^2 x}{(x - 1)^2}$